



## **O JOGO DAS FICHAS COLORIDAS ESTRATÉGIAS DE RESOLUÇÃO DE ALUNOS DO 12.º ANO DE ESCOLARIDADE**

Paulo Ferreira Correia  
Escola Secundária/3 de Barcelos  
ferreiracorreiapaulo@gmail.com

José António Fernandes  
Universidade do Minho  
jfernandes@ie.uminho.pt

### **Resumo**

No presente estudo investigaram-se as estratégias usadas por alunos do 12º ano de escolaridade no jogo das fichas coloridas. Este jogo incorpora uma situação contra-intuitiva envolvendo o conceito de probabilidade condicionada. Participaram no estudo 55 alunos de três turmas do 12º ano de escolaridade, de uma escola do distrito de Braga, que iam registando as suas previsões acerca dos resultados das várias rondas do jogo e os resultados realmente obtidos numa folha de papel preparada para esse efeito. Dos resultados obtidos, salienta-se a diversidade de estratégias e de conflitos surgidos. As estratégias revelaram-se limitadas quanto à referência aos conceitos probabilísticos envolvidos na situação do jogo e os conflitos também explicam as mudanças de estratégia verificadas em muitos alunos ao longo da realização do jogo.

Palavras-chave: probabilidades, situação contra-intuitiva, estratégias de resolução, 12º ano de escolaridade.

### **1. Introdução**

Para Batanero, Godino e Roa (2004) os conhecimentos de estocástica revestem-se de grande importância nas mais variadas actividades profissionais, bem como no desenvolvimento do raciocínio crítico. Estes autores referem também que o ensino das Probabilidades e da Estatística não é uma tarefa fácil para os professores de Matemática, até porque eles normalmente possuem pouca ou nenhuma preparação específica nestas áreas científicas.

Hawkins (1990) propõe que a formação em estocástica não pode reduzir-se ao ensino de estruturas conceptuais e ferramentas de resolução de problemas, devendo desenvolver-se no aluno formas de raciocinar e um forte sistema de intuições correctas. A estocástica torna-se difícil de ensinar quando pretendemos mostrar as suas aplicações e não nos limitamos apenas à apresentação de diferentes modelos. Questões como “Como obter



conhecimento a partir dos dados?”, “Por que motivo um modelo é adequado?” e “Como lidar com ideias de aleatoriedade e causalidade?” devem ser aprofundadas.

No caso das Probabilidades, o facto de se tratar de uma área relativamente nova, comparativamente com outros ramos da matemática, e cujo desenvolvimento conceptual está ligado a uma variedade de paradoxos, que mostram a disparidade entre a intuição e o desenvolvimento conceptual, podem explicar as dificuldades dos alunos na sua aprendizagem.

Embora Kolmogorov tenha estabelecido um sistema axiomático satisfatório nos anos 30 do século passado, subsistem ainda controvérsias sobre a interpretação de conceitos básicos de probabilidades e sua aplicação à estatística (Batanero, Henry & Parzyz, 2005). No centro dessas controvérsias encontra-se o próprio conceito de probabilidade, enquanto conceito multifacetado, que pode ser visto sob diferentes perspectivas.

Borovcnik, Bentz e Kapadia (1991) distinguem quatro conceitos de probabilidade: (1) o conceito clássico, em que se atribuem probabilidades a acontecimentos com base na definição clássica de probabilidade, devida a Laplace, constitui uma abordagem *a priori* da probabilidade e nela assume-se, implicitamente, a equiprobabilidade de todos os acontecimentos elementares do espaço amostral; (2) o conceito frequentista ou empírico, em que a probabilidade de um acontecimento resulta da frequência relativa observada em experiências repetidas, o que destaca o seu carácter *a posteriori*; (3) o conceito subjectivista, em que as probabilidades são avaliações de situações de incerteza inerentes à mente do sujeito, combinando a informação prévia e os dados empíricos, que equivalem a frequências em provas repetidas, através da fórmula de Bayes para obter uma nova probabilidade do acontecimento em questão; e (4) o conceito estrutural, que é definido implicitamente por um sistema de axiomas e um conjunto de definições e teoremas deduzidos daqueles axiomas.

Borovcnik e Peard (1996) referem que os resultados contra-intuitivos em probabilidades são observados mesmo em níveis muito elementares, enquanto noutros ramos da matemática resultados contra-intuitivos são observados apenas quando está envolvido um elevado grau de abstracção. Os autores sugerem que o raciocínio probabilístico é diferente do raciocínio lógico ou causal: no raciocínio lógico, uma proposição é sempre verdadeira ou falsa; uma proposição relativa a um acontecimento aleatório é verdadeira ou falsa só depois de se efectuar a experiência. Antes de efectuar a experiência apenas



podemos considerar a probabilidade do acontecimento, cuja determinação requer a especificação do espaço amostral da experiência. Contudo, por vezes, esta especificação reveste-se de dificuldade, especialmente no caso da probabilidade condicionada (Falk, 1986).

Tomando por referência as situações contra-intuitivas, relativamente às quais as pessoas possuem intuições resistentes à perspectiva normativa (Fernandes, 1990), Lesser (1995) distingue dois paradigmas de ensino da estocástica: (1) o paradigma tradicional, em que os exemplos contra-intuitivos não são explorados (pelo menos de forma sistemática); e (2) o paradigma alternativo, baseado em exemplos contra-intuitivos.

Para Lesser (1995), a abordagem predominante no ensino da estocástica traduz a posição tradicional em virtude de ela parecer predominante entre os professores e entre os livros de texto e por ser adoptada institucionalmente. Para Watkins, Burrill, Landwehr e Scheaffer (1992) mostrar como mentir com a estatística e salientar paradoxos em probabilidades tem como consequência a destruição da confiança do aluno.

Eles [os paradoxos] parecem desafiar os estudantes e captar o seu interesse. É tentador trazer para a sala de aula alguns dos problemas mais contra-intuitivos para demonstrar aos estudantes as suas tendências erradas e talvez esclarecê-las. Contudo, se um professor persiste em chamar à atenção dos estudantes para o quão predispostos estão a cometer erros inferenciais, eles podem tornar-se tão convencidos das suas incapacidades ao ponto de jamais acreditarem que alguma vez dominarão técnicas mais apropriadas. (Falk & Konold, 1992, p. 161)

No paradigma alternativo, segundo Gordon (1991), a exploração destes exemplos apresenta várias vantagens: cativa a atenção dos estudantes em virtude do desequilíbrio experienciado, desafia hábitos de pensamento e práticas e constitui uma oportunidade para desenvolver um maior apreço acerca da necessidade de exploração, de reflexão e de raciocínio.

Lesser (1998) manifesta a convicção que o uso inteligente destes exemplos contra-intuitivos em estatística suporta uma pedagogia construtivista, promovendo uma aprendizagem mais profunda a partir das crenças prévias dos alunos e encorajando o papel do professor como facilitador da aprendizagem. Além disso, os alunos poderão beneficiar de oportunidades para desenvolver a motivação, a metacognição, o pensamento crítico, a aprendizagem por descoberta, as conexões com aplicações da vida



real e a história. Konold (1994) destaca o efeito motivacional dos resultados surpreendentes, afirmando que os “estudantes estão motivados para explorar o problema mais formalmente” (Konold, 1994, p. 233). Além disso, para este autor, os estudantes, quando confrontados com estes resultados surpreendentes, revelam ansiedade em exprimir opiniões nas discussões da sala de aula.

Falk e Konold (1992) advogam um equilíbrio entre situações que ilustrem concepções erradas e enviesamentos e situações que afirmem a capacidade dos estudantes. As intuições válidas, cuja existência tem sido demonstrada pelos mais variados estudos (e.g., Fischbein, Nello & Marino, 1991; Green, 1983), constituem para estes autores um bom ponto de partida para o ensino das probabilidades.

Falk (1986) apresentou a alunos a seguinte situação contra-intuitiva:

Uma urna tem três cartões: um é azul dos dois lados, outro é verde dos dois lados e o terceiro é azul de um lado e verde do outro. Selecciona-se um cartão ao acaso que é colocado sobre uma mesa. O lado que se vê é azul. Qual a probabilidade de o outro lado ser também azul?

Das respostas obtidas, o autor verificou que a maior parte dos estudantes apresentou o valor  $1/2$  para a probabilidade de a cor escondida ser azul se na face mostrada estava a cor azul. Segundo o autor, os alunos deram esta resposta porque consideraram que o cartão verde de ambos os lados estava excluído e os restantes dois seriam equiprováveis. Apesar de o cartão verde dos dois lados estar realmente excluído, ver a face azul é o acontecimento que deve condicionar a probabilidade de a outra face do cartão ser também azul. Como dois dos três resultados têm azul na face oculta, a resposta correcta é  $2/3$ .

Nesta situação contra-intuitiva, Batanero, Godino e Roa (2004), no estudo que realizaram com professores, trabalhando individualmente, identificaram as seguintes estratégias iniciais: prever vermelho (V) e azul (A) alternadamente; prever V ou A em todos os ensaios; prever a cor ao acaso; prever duas azuis, uma vermelha (ou algo semelhante); prever a cor mostrada; e prever a cor não mostrada. De uma maneira geral, quando se aumentou o número de ensaios, algumas das estratégias foram abandonadas porque os resultados empíricos contrariavam as expectativas iniciais dos professores. No final, os professores tinham preferência por uma ou mais estratégias e outros mantinham a estratégia incorrecta, admitindo que o fracasso da estratégia se devia à natureza aleatória da experiência.



Embora a simulação tenha um papel importante no estabelecimento de intuições e na materialização de problemas probabilísticos, ela não fornece a chave de como e porquê os problemas foram resolvidos. Para compreender a solução de um problema ou para justificar um resultado precisamos de efectuar cálculos formais, incluindo esquemas combinatórios que sugerem a natureza complementar das abordagens clássica e frequentista de probabilidade (Batanero, Godino & Roa, 2004).

Nesta investigação estuda-se a situação contra-intuitiva referida antes (Falk, 1986), sob a forma de jogo, em alunos do 12º ano, identificando as estratégias por eles adoptadas na tentativa de ganhar o jogo e a origem dessas estratégias a partir dos conflitos por eles experienciados ao longo das várias rondas do jogo.

## 2. Metodologia

Neste estudo, de carácter exploratório, os alunos realizaram o jogo das *fichas coloridas* com o objectivo de encontrar a melhor estratégia de jogo (aquela que dá a maior probabilidade de ganhar o jogo ao fim de um grande número de partidas). Este jogo baseia-se no *paradoxo da caixa de Bertrand*, envolve o conceito de probabilidade condicionada e contextualiza uma discussão entre o conceito clássico de probabilidade e o conceito frequentista de probabilidade (Batanero, Godino & Roa, 2004).

**Descrição do jogo.** Neste jogo, adaptado de Batanero, Godino e Roa (2004), consideram-se 3 fichas da mesma forma e tamanho, das quais uma é vermelha (V) em ambas as faces, outra é azul (A) nas duas faces e a terceira é azul numa face e vermelha na outra face. As três fichas são colocadas num copo, que se agita convenientemente, antes de seleccionar, ao acaso, uma das três fichas. Seguidamente, mostra-se uma das faces da ficha escolhida, mantendo a outra tapada, e pede-se a cada jogador que preveja a cor da face oculta. Uma vez feitas as previsões, que são registadas numa grelha igual à da Figura 1, é dada a conhecer a cor da face oculta e cada jogador ganha um ponto sempre que acerte na cor da face oculta. Este procedimento é repetido até se completar uma ronda de 10 ensaios, altura em que o jogador é questionado sobre a estratégia que usou.

Embora a actividade incluísse só grelhas de registo para 4 rondas, foi dito aos alunos que seriam efectuadas tantas rondas quantas as desejadas.



Ronda 1	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Cor da face mostrada										
Cor prevista da face oculta										
Cor da face oculta										

Seguiste alguma estratégia? Descreve-a.

Figura 1. Grelha de registo da primeira ronda do jogo.

A simulação e registo dos resultados ajudaria os alunos na procura da melhor estratégia de jogo, na medida em que daria indicações sobre os valores das probabilidades das diferentes estratégias, especialmente se os alunos solicitassem um maior número de rondas.

No estudo participaram 55 alunos do 12.º ano de escolaridade de uma escola do distrito de Braga, 23 rapazes e 32 raparigas, cuja média das idades era de 17,4 anos (variando entre 16 e 20 anos) e cuja média das classificações a Matemática A, no final do 2.º período, era de 13,2 valores (variando entre 6 e 20 valores), numa escala de 0 a 20.

Cada um dos alunos realizou o jogo individualmente, registando os resultados previstos e observados e as estratégias utilizadas nas rondas do jogo na folha da actividade. A recolha dos dados efectuou-se na última semana de aulas do 3.º período, no ano lectivo 2008-2009, em momentos diferentes de um mesmo dia em cada uma das três turmas envolvidas na investigação.

### 3. Resolução do problema das fichas coloridas

#### 3.1. Estratégias utilizadas pelos alunos durante o jogo

Na Tabela 1 apresentam-se as frequências das diferentes sequências das cores da face mostrada e da face oculta registadas nas quatro rondas efectuadas em cada uma das turmas. Embora tenham sido efectuados apenas 40 ensaios, 10 por cada ronda, os resultados apontam claramente para uma maior frequência da cor da face oculta ser igual à cor da face mostrada, comparativamente com a frequência da cor da face oculta



ser diferente da cor da face mostrada <sup>1</sup>, confirmando-se empiricamente a maior probabilidade teórica desse resultado.

Tabela 1 – Frequências das diferentes sequências obtidas na totalidade das 4 rondas (40 ensaios) por turma

Sequência face mostrada e face oculta	Frequência (em %) por turma		
	A (n = 21)	B (n = 12)	C (n = 22)
VV	30,0	27,5	40,0
AA	32,5	55,0	32,5
AV	20,0	5,0	15,0
VA	17,5	12,5	12,5

As resoluções dos alunos contemplam várias formas de representação: textos que podem ou não integrar cálculos (61,8%); diagramas de árvore (10,9%); tabelas (9,1%); desenhos para representar a situação (3,6%); e diagramas de Venn (3,6%). Porém, só 78,2% dos alunos explicitou a estratégia utilizada na totalidade ou em parte das rondas, 12,7% não explicitou a estratégia usada e 9,1% preencheu apenas as grelhas correspondentes a cada ronda.

Na Tabela 2 apresentam-se as estratégias utilizadas pelos alunos e a frequência com que foram utilizadas ao longo das quatro rondas.

Da Tabela 2 conclui-se que, na globalidade das rondas, a estratégia predominante consistiu em *prever mais vezes a cor mostrada*, seguindo-se a estratégia *prever sempre a cor mostrada* (correcta).

Em relação à estratégia *prever sempre a cor mostrada*, das justificações dos alunos inferiu-se que o raciocínio que esteve na base da estratégia consistiu em considerar que a probabilidade de extrair uma ficha com a mesma cor em ambas as faces era maior do que a probabilidade de extrair a ficha com faces de cores diferentes.

Relativamente à estratégia *prever mais vezes a cor mostrada*, 27,3% dos alunos admitiram que é mais provável que a cor da face oculta seja igual à cor da face mostrada, mas previram também a cor contrária à face mostrada, em alguns dos 10 ensaios. As previsões e justificações efectuadas levam-nos a inferir que esses alunos

<sup>1</sup> Apenas um aluno, de entre os 55 que participaram no estudo, solicitou uma quinta ronda. Este caso não foi contemplado na Tabela 2.



sentiram alguma necessidade de contemplar nas suas previsões a cor diferente da cor mostrada, uma vez que também esta teria alguma probabilidade de ser extraída.

Tabela 2 – Estratégias utilizadas pelos alunos nas quatro rondas

Estratégias	Frequência (em %)			
	Ronda 1	Ronda 2	Ronda 3	Ronda 4
Prever sempre a cor mostrada (correcta)	0	21,8	25,5	23,7
Prever mais vezes a cor mostrada	10,9	40,1	47,3	36,5
Prever o mesmo número de vezes a cor mostrada e a outra cor	0	10,9	10,9	12,7
Prever sempre a cor não mostrada	10,9	5,5	0	1,8
Prever mais vezes a cor não mostrada	5,4	3,6	1,8	3,6
Prever sempre a mesma cor	10,9	1,8	3,6	1,8
Prever o mesmo número de vezes ambas as cores	1,8	5,5	0	0
Prever mais vezes uma das cores (vermelha ou azul)	0	3,6	7,3	10,9
Prever alternadamente cada uma das cores	5,5	3,6	3,6	3,6
Prever a cor vermelha sempre que a cor mostrada é vermelha	0	1,8	0	1,8
Prever a cor ao acaso	54,6	1,8	0	3,6

Na primeira ronda do jogo, 54,6% dos alunos referiram ter efectuado uma previsão da cor da face oculta *ao acaso*. A adesão a esta estratégia reduziu-se drasticamente nas rondas seguintes do jogo, o mesmo acontecendo com as estratégias *prever sempre a cor não mostrada* e *prever sempre a mesma cor*, que na última ronda foram utilizadas apenas por um aluno.

Já as estratégias *prever o mesmo número de vezes a cor mostrada e a outra cor* e *prever mais vezes uma das cores (vermelha ou azul)* vão ganhando alguns adeptos ao longo das três últimas rondas de jogo. Relativamente à primeira estratégia, 34,5% dos alunos, em algum momento, referiram que a probabilidade da face oculta ser vermelha é igual à probabilidade da face oculta ser azul.





Dos 55 alunos, 94,5% mudou de estratégia ao longo das quatro rondas do jogo e 38,2% adoptou uma estratégia na segunda ronda que manteve nas rondas seguintes.

Mais de metade dos alunos (56,4%) referiu que comparavam os resultados obtidos com os resultados das rondas anteriores. Sempre que essa comparação envolveu a determinação de frequências, foram determinadas:

- as frequências das cores vermelha (V) e azul (A) ocultas e/ou o número de sequências VV, AA, VA, AV (cores mostrada e oculta), sempre em cada ronda (14,5%);
- a frequência do resultado mais frequente, que tanto podia ser uma sequência de cores (mostrada e oculta) ou a cor da face oculta (12,7%);
- a frequência com que saíram as fichas com a mesma cor nas duas faces e a frequência com que saiu a ficha com faces de cores diferentes, mas apenas em cada ronda (7,3%);
- as frequências das cores V e A mostradas e/ou as frequências das cores V e A ocultas (3,6%), também em cada ronda;
- a frequência acumulada de VV+AA em todas as rondas (3,6%);
- a frequência da sequência de cores AV (1,8%);
- a frequência acumulada de parte dos resultados VV, AA e AV+VA, nas rondas que se pretendiam comparar (1,8%);
- a frequência acumulada de VV, AA e AV+VA em todas as rondas (1,8%).

Observou-se que apenas 7,2% dos alunos usou a frequência acumulada dos resultados obtidos na totalidade ou parte das rondas, o que nos 40 ensaios mostrava um comportamento indutor da identificação da estratégia correcta, como foi referido antes. Esta estratégia não esteve muito presente na lista de estratégias dos alunos.

As justificações de alguns alunos (27,3%) revelavam uma concepção determinista na medida em que utilizavam o resultado da ronda para tomarem uma das seguintes decisões: caso a ronda não validasse a conjectura, mudavam de estratégia; se a ronda validava a estratégia, mantinham-na até surgir novo conflito; ou mudavam de estratégia porque pretendiam acertar em 100% dos casos. Porém, as justificações de mais de metade dos alunos (54,5%) revelam uma concepção mais probabilística, na medida em que aceitavam a influência do acaso nos resultados.



### 3.2. Conflitos experienciados pelos alunos ao longo do jogo

Analizadas as grelhas de registo das quatro rondas e as justificações dos alunos, identificou-se um conjunto de conflitos que foram emergindo ao longo dessas rondas do jogo. As opções dos alunos poderão encontrar alguma justificação nos conflitos que foram surgindo e que se apresentam a seguir.

*Conflito 1* (experienciado por 27,3% dos alunos). O aluno conclui que é mais provável a cor da face oculta ser igual à cor da face mostrada, mas também considera provável que a cor da face oculta seja diferente da cor da face mostrada. Então prevê para a face oculta predominantemente a cor da face mostrada e algumas vezes prevê para a face oculta a outra cor.

*Conflito 2* (experienciado por 10,9% dos alunos). O aluno tanto assume que é igualmente provável que a cor da face oculta seja vermelha (V) ou azul (A), como, apoiando-se nos resultados das rondas, assume que é mais provável sair AA ou VV (faces mostrada e oculta) do que sair AV ou VA.

*Conflito 3* (experienciado por 3,6% dos alunos). O aluno tanto assume que é mais provável ser seleccionada uma ficha em que as duas faces têm a mesma cor como, apoiando-se nos resultados das rondas, assume que é mais provável sair uma das cores V ou A ou que é igualmente provável sair AA, VV, AV e VA.

*Conflito 4* (experienciado por 1,8% dos alunos). O aluno acha que é mais provável que a face oculta seja de cor diferente da cor mostrada, mas como nas rondas sai mais vezes cor igual à cor mostrada usa esta estratégia.

*Conflito 5* (experienciado por 1,8% dos alunos). O aluno conclui que é mais provável a cor da face oculta ser diferente da cor da face mostrada, mas também assume que é provável que a cor da face oculta seja igual à cor da face mostrada. Então prevê para a face oculta predominantemente cor diferente da cor da face mostrada e algumas vezes prevê para a face oculta cor igual à cor da face mostrada.

Nas poucas justificações que incluíam cálculos, foram identificados os seguintes erros: determinar incorrectamente a probabilidade conjunta (5,5%); definir incorrectamente os acontecimentos (3,6%); considerar para valor da probabilidade condicionada o valor da



probabilidade da intersecção (1,8%); e considerar que  $P(V|A) = 1/4$ , porque não se exclui a cor mostrada (1,8%).

Quanto aos elementos correctos, identificaram-se os seguintes: a probabilidade de ser seleccionada uma ficha com ambas as faces da mesma cor é  $2/3$  (16,4%); a probabilidade de ser seleccionada a ficha com as faces de cor diferente é  $1/3$  (12,7%); a probabilidade da face mostrada ser Vermelha (Azul) é  $1/2$  (10,9%); estabelecer a fórmula da probabilidade condicionada (7,3%); definir correctamente os acontecimentos (1,8%);  $P(A|V) = 1/3$ ,  $P(V|A) = 1/3$ ,  $P(V|V) = 2/3$  e  $P(A|A) = 2/3$  (1,8%);  $P(A|V) = 1/3$  e  $P(V|V) = 2/3$  (1,8%).

#### 4. Conclusão

O jogo das fichas coloridas, aqui explorado com alunos do 12º ano de escolaridade, foi também explorado por Batanero, Contreras, Fernandes e Ojeda (in press) com professores de Matemática, tendo-se observado que estes últimos adoptaram estratégias semelhantes às que aqui foram referidas pelos alunos.

Em geral, as estratégias referidas pelos alunos eram pouco elaboradas, sendo descritas mais na forma de texto, incluindo ou não cálculos, e alguns alunos nem sequer explicitaram qualquer estratégia. Este resultado pode indiciar que os alunos possuíam conhecimentos limitados em relação aos conceitos envolvidos na situação do jogo.

Por outro lado, foi evidente ao longo das várias rondas do jogo a influência recíproca entre as perspectivas clássica e frequentista de probabilidade. Neste último caso, os alunos usavam os resultados empíricos obtidos numa ronda para avaliar a sua estratégia, mantendo-o ou alterando-a consoante ela era confirmada ou não. No entanto, porque os alunos se centraram em cada ronda (cada uma com 10 ensaios) e não na globalidade das rondas, pode concluir-se que eles aderiram à chamada “lei dos pequenos números”, de acordo com a qual “a lei dos grandes números também se aplica a pequenos números” (Kahneman & Tversky, 1982, p. 36).

Simultaneamente, os resultados empíricos obtidos nas rondas despoletaram nos alunos conflitos porque as estratégias adoptadas não correspondiam aos resultados observados, fazendo com que os alunos alterassem muitas vezes as suas estratégias. Para além disso,



verificou-se que mais de um terço dos alunos mantiveram a estratégia adoptada na segunda ronda nas rondas seguintes e que mais de metade dos alunos se apoiou na estratégia correcta ou em pressupostos correctos (prever predominantemente cores iguais para as faces mostrada e oculta) nas duas últimas rondas do jogo.

A diversidade de estratégias e de conflitos surgidos na realização do jogo constitui um excelente ponto de partida para envolver os alunos e o professor na discussão das suas ideias (Konold, 1994). Estas discussões em grande grupo constituem uma boa oportunidade para perseguir um duplo propósito: por um lado, desenvolver nos alunos o conhecimento institucional, pois são muitos os estudos que revelam erros dos alunos em situações contra-intuitivas (e.g., Falk, 1986; Fernandes, 1990), e, por outro lado, aprofundar a compreensão dos alunos sobre os conceitos envolvidos no jogo.

## Referências bibliográficas

- Batanero, C., Contreras, J. M., Fernandes, J. A. & Ojeda, M. M. (in press). Paradoxical games as a didactic tool to train teachers in probability. ICOTS8 – 8<sup>th</sup> International Conference on Teaching Statistics, Ljubljana, Slovenia, 11-16 July, 2010.
- Batanero, C., Godino, J. D. & Roa, R. (2004). Training teachers to teach probability. *Journal of Statistics Education*, 12 (1). On line: [www.amstat.org/publications/jse/](http://www.amstat.org/publications/jse/)
- Batanero, C., Henry, M., & Parzyz, B. (2005). The nature of chance and probability. In G. A. Jones (Ed.), *Exploring probability in school: Challenges for teaching and learning* (pp. 15-37). New York: Springer.
- Borovcnik, M., & Peard, R. (1996). Probability. In A. J. Bishop et al. (Eds.), *International handbook of mathematics education* (pp. 239-287). Dordrecht: Kluwer Academic Publishers.
- Borovenik, M., Bentz, H.-J., & Kapadia, R. (1991). A probabilistic perspective. In R. Kapadia & M. Borovcnik (Eds.), *Chance encounters: Probability in education* (pp. 27-71). Dordrecht: Kluwer Academic Publishers.
- Falk, R. (1986). Conditional probabilities: insights and difficulties. In R. Davidson & J. Swift (Eds.), *Proceedings of the Second International Conference on Teaching Statistics* (pp. 292-297). Victoria: International Statistical Institute.
- Falk, R., & Konold, C. (1992). The psychology of learning probability. In F. Gordon & S. Gordon (Eds.), *Statistics for the twenty-first century, MAA Notes 26* (pp. 151-164). Washington, DC: Mathematical Association of America.
- Fernandes, J. A. (1990). *Concepções erradas na aprendizagem de conceitos probabilísticos*. Dissertação de Mestrado, Universidade do Minho, Braga.
- Fischbein, E., Nello, M. S., & Marino, M. S. (1991). Factors affecting probabilistic judgments in children and adolescents. *Educational Studies in Mathematics*, 22, 523-549.
- Green, D. R. (1983). A survey of probability concepts in 3000 pupils aged 11-16 years. In D. R. Grey, P. Holmes, V. Barnett & G. M. Constable (Eds.), *Proceedings of the First*



*International Conference on Teaching Statistics* (vol. 2, pp. 766-783). Sheffield, UK: Teaching Statistics Trust.

- Hawkins, A. (1990). *Training teachers to teach statistics*. Voorburg: International Statistical Institute.
- Kahneman, D., & Tversky, A. (1982). Subjective probability: A judgment of representativeness. In D. Kahneman, P. Slovic & A. Tversky (Eds.), *Judgment under uncertainty: Heuristics and biases* (pp. 32-47). Cambridge: Cambridge University Press.
- Konold, C. (1994). Teaching probability through modeling real problems. *The Mathematics Teacher*, 87(4), 232-235.
- Lesser, L. M. (1995). The role of counterintuitive examples in statistics education (Doctoral dissertation, University of Texas at Austin, 1994), *Dissertation Abstracts*, 55(10A), 3126-A.
- Lesser, L. M. (1998). Countering indifference – Using counterintuitive examples. *Teaching Statistics*, 20(1), 10-12.
- Watkins, A., Burrill, G., Landwehr, J. M., & Scheaffer, R. L. (1992). Remedial statistics?: The implications for colleges of the changing secondary school curriculum. In F. Gordon & S. Gordon (Eds.), *Statistics for the twenty-first century*, *MAA Notes* 26 (pp. 45-55). Washington, DC: Mathematical Association of America.